Prof. Dr. Erik Jacobson
Heinestraße 69
72762 Reutlingen

18.02.2015

Neues von der Induzierten Spannung

Die durch ein Magnetfeld in einer Spule induzierte Spannung U_i lässt sich üblicherweise leicht aus der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ berechnen. Diese Berechnung, die einen geschlossenen Stromkreis voraus setzt, leidet jedoch unter mehreren Mängeln, die weitgehend ignoriert werden: zum Ersten sind keine Messpunkte für die Spannung auf dem Stromkreis definiert, zum Zweiten versagt diese Berechnung bei offenen Anordnungen, wie z.B. einem Transformator im Leerlauf, zum Dritten verschleiert diese Berechnung, dass die Induzierte Spannung durch zwei ganz unterschiedliche physikalische Phänomene zustande kommt. Tatsächlich existiert aber eine Formel für offene Kreise [IEV], die weitgehend unbekannt ist und immer wieder angezweifelt wird. Im Folgenden soll diese Formel vorgestellt, mit der traditionellen Formel verglichen und ihre Gültigkeit nachgewiesen werden.

The voltage induced by a magnetic field U_i is usually easily calculated from the time derivative of the magnetic flux Φ. These calculations however suffer from a severe deficiency, which is observed in different ways: first, no indication is given, where the voltage has to be measured on a closed circuit; second, these calculations fail to work on open arrangements, e.g. for the open-circuit voltage of a transformer; third it hides the fact that it is 2 different physical phenomena which contribute to the voltage. In fact an equation exists for open circuits, which is not well known, and sometimes disbelieved. This equation will be presented in the following, and a proof will be given.

Die „klassische“ Berechnung

In praktischen allen Lehrbüchern der Physik und der Elektrodynamik findet man, dass sich die durch ein Magnetfeld in einer Spule induzierte Spannung U_i[1)] nach Faraday aus der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses Φ berechnen lässt:

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \quad {}^{2)} \tag{1}$$

Hier wird stets vorausgesetzt, dass es sich um einen geschlossenen Leiterkreis handelt, der eine Fläche S umschließt, denn sonst wäre der Magnetische Fluss als Integral über die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ nicht darstellbar durch

$$\Phi = \int_S \vec{B}\,\vec{e}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}A = \int_C \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r} \tag{2}$$

Darin ist $\vec{e}_\mathrm{n}$ der Einsvektor, der auf einem Flächenelement $\mathrm{d}A$ senkrecht steht, $\vec{A}$ das magnetische Vektorpotential, $\mathrm{d}\vec{r}$ ein Linienelement des Randes C der Fläche S, das sich mit der lokalen Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Bezugssystem der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ bewegt.

Das totale Differential in Gl (1) muss sowohl auf die zeitliche Änderung des B-Feldes als auch auf eine räumliche Änderung der Integrationsfläche S wirken.

Mit Hilfe der Konvektiven Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla$ und dem Stokes'schen Integralsatz

erhält man [Jack, S. 245]
$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,\vec{e}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}A + \oint_C \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\vec{r} \tag{3}$$

Dabei bildet das Linienelement $\mathrm{d}\vec{r}$ mit den Flächenelementen $\vec{e}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}A$ den Rechtsschraubsinn.
NB Diese Form verlangt die Berechnung von 2 Integralen über unterschiedliche Bereiche.

---

1) In der Literatur wird meistens von Induzierter Spannung gesprochen [DIN, Joos, Pit, Stöck, Strop, Mari], manchmal von elektromotorischer Kraft (EMK) [Jack, Feyn, Grei, Grif], seltener von Umlaufspannung [Kling] oder Ringspannung [Gerth].

2) Oft wird hier noch mit der Windungszahl N der Spule multipliziert [Kling, Stöck], was unnötig ist, denn die Gesamtfläche, die von einer (geschlossenen) Spule umfasst wird, enthält bereits deren Windungszahl.

Der erste Term in Gl. (3) folgt auch unmittelbar aus dem der 1. Maxwell-Gleichung in Integralform, die oft auch als (Faradaysches) Induktionsgesetz bezeichnet wird [Jack, Feyn, Kling, Stöck].
Der zweite Term folgt aus der Bewegung der Wegelemente $\mathrm{d}\vec{r}$ des Flächenrands C mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$.
Tatsächlich kann der erste Term in Gl (3) wegen $\operatorname{rot}\vec{A} := \vec{B}$ mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes weiter umgeformt werden zu

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\vec{e}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}A = \int_S \frac{\partial(\operatorname{rot}\vec{A})}{\partial t}\vec{e}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}A = \int_S \operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\vec{e}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}A = \oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r}\,,$$

was schließlich zur konventionellen Berechnung der Induzierten Spannung führt:

$$\boxed{U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,\mathrm{d}\vec{r} + \oint_C \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\mathrm{d}\vec{r} = -\oint_C \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right)\mathrm{d}\vec{r}} \qquad (4)$$

NB Diese Form verlangt die Berechnung eines Linienintegrals über 2 unterschiedliche Größen.

Kritik

Schaut man sich die so definierte Induzierte Spannung genauer an, fallen schwerwiegende, miteinander korrelierte Mängel auf:

1. Die Gl. (1) verschleiert, dass die Induzierte Spannung durch zwei ganz unterschiedliche physikalische Phänomene zustande kommt [Feyn]:
   Durch die **Wechselinduktion** (auch Ruheinduktion genannt), die auf der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes beruht, und durch die **Bewegungsinduktion,** die durch die Bewegung des Leiters gegenüber dem Magnetfeld zustande kommt. Erst die Gln. (3) und (4) zeigen die zwei von einander unabhängigen Bestandteile, die hier lediglich als Folge von mathematischen Umrechnungen erscheinen.
2. Es ist nicht ersichtlich, an welchen **Stellen** (a, b) des Flächenrandes C die Spannung gemessen werden kann. Vielfach wird argumentiert, dass man ja den Strom im Leiterkreis messen und aus dem Widerstand des Kreises die Spannung berechnen kann[3)]. Das geht oft, aber nicht immer, und der Widerstand ist noch von einigen variablen Umweltfaktoren abhängig, wie z.B. der Temperatur. Schließlich erzeugt der Induzierte Strom seinerseits wieder ein (inhomogenes!) Magnetfeld, das sich dem ursprünglichen als Selbstinduktion überlagert und somit den Widerstand komplex macht.
3. Es ist Tatsache, dass auch an offenen Leiterkreisen eine Induzierte Spannung auftritt, wie z.B. die Leerlaufspannung eines Transformators – die sich zu gewaltigen Werten, z.B. bei der Zündspule und beim Tesla-Trafo aufbaut, ohne dass zunächst ein Strom fließt. Diese Spannung zu berechnen ist eine Notwendigkeit – Dass sie mit der üblichen Gleichung für den technischen Gebrauch genügend gut berechnet werden kann, ist ohne Zweifel; was aber, wenn man es in dem einen oder anderen Fall doch etwas genauer haben möchte?

Erste Versuche

Eine Formel für die in einem offenen Leiter induzierte Spannung zwischen zwei Ortspunkten $\vec{r}_a$ und $\vec{r}_b$ wird sich vermutlich als Linienintegral über einen Weg C zwischen diesen Punkten darstellen lassen.
Ein erster mutiger Versuch wäre es, das geschlossene Linienintegral über das magnetische Vektorpotential aus Gl (2) zu übernehmen und es einfach zu öffnen, also zu schreiben

$$U_{ind}(a,b) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{r_a(C)}^{r_b} \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r}\,. \qquad (5)$$

In Analogie zur Herleitung von Gl. (3) wird man auch hier die konvektive Ableitung bilden und erhält

3) Faraday selber beschrieb seine Entdeckung als die Induktion von Strömen [Tynd]

$$-U_{ind}(a,b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{r_a(C)}^{r_b}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{r_a(C)}^{r_b}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r}+\vec{v}\cdot\nabla\int_{r_a(C)}^{r_b}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_a(C)}^{r_b}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r}+\vec{v}\cdot\nabla\int_{r_a(C)}^{r_b}\vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Leider erweist sich dieser Versuch nicht als erfolgreich, da die konvektive Änderung im rechten Term nicht zum erwünschten Ergebnis führt, wie eine einfache Berechnung für einen geraden Leiter der Länge l zeigt, der sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu einem zeitlich und räumlich konstanten B-Feld bewegt; dabei kommt nur die halbe Spannung von dem heraus, was man aus anderem Zusammenhang erwartet, nämlich U=vBl. Ein korrektes Ergebnis erhält man hier jedoch, wenn verlangt wird, dass die Bezugspunkte a und b im Bezugssystem des Magnetfeldes ruhen, die induzierte Spannung also im Bezugssystem des Magnetfeldes gemessen wird.
Ein zweiter Versuch kann in gleicher Weise mit Gl. (4) gemacht werden, in der die zwei Induktionsphänomene getrennt sind:

$$\boxed{U_{\text{ind}}(a,b)=-\int_{r_a(\mathrm{C})}^{r_b}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right)\mathrm{d}\vec{r}} \tag{6}$$

Dass dieses Integral die richtige Lösung ist, soll im Folgenden gezeigt werden

Die „moderne“ Berechnung

Eine elektrische Spannung kommt durch die Trennung von Ladungsträgern zustande; diese wird durch ein elektrisches Feld bewirkt, das als Linienintegral über eine elektrische Feldstärke berechnet werden kann:

$$U(a,b)=-\int_{r_a(C)}^{r_b}\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \tag{7}$$

In einem reinen Magnetfeld können elektrische Felder auf Grund von zwei unterschiedlichen Phänomenen entstehen und zu Spannungen führen [Feyn]:

1. Die **Wechselinduktion** wird durch die zeitliche Änderung des Magnetfelds bestimmt.

Die 1. Maxwell-Gleichung [DIN, …] liefert $\operatorname{rot}\vec{E}_W=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$,

nach der ein elektrisches Wirbelfeld $\vec{E}_W$ entsteht, wenn ein Magnetfeld sich zeitlich ändert.

Mit dem Magnetischen Vektorpotential $\vec{A}$, das definiert ist durch $\operatorname{rot}\vec{A}:=\vec{B}$, erhält man

$\operatorname{rot}\vec{E}_W=-\frac{\partial\operatorname{rot}\vec{A}}{\partial t}$ und, da man räumliche und zeitliche Ableitungen vertauschen kann,

$$\operatorname{rot}\vec{E}_W=-\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\,. \tag{8}$$

Die Argumente der Rotationsoperatoren sind gleich, $\vec{E}_W=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+X$, bis auf eine additive Größe X ,

die bei Rotationsbildung zu Null wird. Das dann ist der Fall, wenn X der Gradient eines Skalarfelds ist, $X=\operatorname{grad}V$. Dies ist im Realfall ein zusätzliches wirbelfreies elektrisches (Quellen)Feld $E''=\operatorname{grad}V$,

das bekanntlich eine elektrische Spannung influenzieren kann.
D.h. wenn zusätzlich zu einem magnetischen Wechselfeld ein von elektrischen Ladungen erzeugtes wirbelfreies elektrisches Feld E'' vorhanden ist, kommt zu der vom Magnetfeld in einem Leiter induzierten Spannung noch eine vom elektrischen Feld influenzierte Spannung hinzu.
Das kann niemanden überraschen.

2. Die **Bewegungsinduktion** entsteht bei Bewegung im Magnetfeld; hierbei entsteht ein elektrisches Feld $\vec{E}_B=\vec{E}'=\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ aufgrund der Lorentztransformation des elektromagnetischen Feldtensors **F**

aus einem Magnetfeld [Jack]. Dieses Feld ist es auch, das zur Lorentzkraft auf bewegte Ladung im Magnetfeld führt.

NB Die Bewegungsinduktion für einen geraden Leiter der Länge l, der sich mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld *B* bewegt, ist $U_{ind} = \int_a^b \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) d\vec{s}$ = v·B·l.

Dies wird in einigen Lehrbüchern erwähnt [Griff, Küpf, Lind, Pit].

Resultat

Man erhält die magnetisch induzierte Spannung aus den (offenen) Linienintegralen über die Summe der vom Magnetfeld erzeugten elektrischen Felder E_W und E_B:

$$\boxed{U_{\mathrm{ind}}(a,b) = \int_{r_a(\mathrm{C})}^{r_b} E_W \, \mathrm{d}\vec{r} + \int_{r_a(\mathrm{C})}^{r_b} E_B \, \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{r_a(\mathrm{C})}^{r_b} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \mathrm{d}\vec{r} + \int_{r_a(\mathrm{C})}^{r_b} \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{r_a(\mathrm{C})}^{r_b} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \right) \mathrm{d}\vec{r}} \qquad (9)$$

wie der 2. Versuch mit Gl.(6) weiter oben schon vermuten ließ.

Üblicherweise werden die „Messpunkte" a und b der Gl. (9) als im Bezugssystem des Magnetfeldes ruhend betrachtet, während sich die Linienelemente der Kurve (mit nicht-relativistischen Geschwindigkeiten) beliebig im Raum bewegen können.

Probe

Schließt man (zur Probe) das Linienintegral, in der Gl. (9) den Integrationsweg C, setzt also $\vec{r}_b = \vec{r}_a$, erhält man die (magnetisch induzierte) Umlaufspannung gemäß Gl. (4) und Gl. (1) als Spezialfall.

Literatur:

[DIN] DIN 1324-1:1988. Elektromagnetisches Feld – Zustandsgrößen -. Beuth 1990

[Dob] P. Dobrinski, u.a.: Physik für Ingenieure. Teubner. 1984

[Feyn] R. Feynman, et.al.: The Feynman lectures on physics. - 2. Mainly electromagnetism and matter- 6. print.. - Addison-Wesley 1977

[Gerth] Ch. Gerthsen, et al. Physik. 15. Aufl. Springer 1986

[Grein] W. Greiner: Klassische Elektrodynamik; 6. Auflage. Harri Deutsch 2002

[Grif] David J. Griffiths: Introduction to Electrodynamics (4th Edition). Pearson 2012

[Her] E. Hering, et al..: Physikalisch technisches Taschenbuch. VDI Verlag. 1994

[IEV] IEC 60050, das internationale elektrotechnischen Vokabular (Eintrag 121-11-28: 2008/08) über die Webseite von ELECTROPEDIA.ORG zugänglich.

[Jack2] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics; 2. Auflage, Wiley 1975

[Jack3] J. D. Jackson: Klassische Elektrodynamik; 3. Auflage, De Gruyter 2002

[Joos] G. Joos: Lehrbuch der Theoretischen Physik. 15. Aufl. Aula 1989

[Kling] H. Klingbeil: Elektromagnetische Feldtheorie. Teubner 2003

[Krög] R. Kröger; R.Unbehauen: Elektrodynamik. 3. Aufl. Teubner 1993

[Küpf] K. Küpfmüller, u.a.: Theoretische Elektrotechnik. 18. Aufl. Springer 2008

[Pit] R. Pitka: Physik, der Grundkurs. Harri Deutsch. 1999

[Purc] Edward M. Purcell, David J. Morin: Electricity and Magnetism. 3. ed. Cambridge Univ. Press 2013

[Stöck] H. Stöcker: Taschenbuch der Physik. 6. Aufl. Harri Deutsch. 2010

[Strop] H. Stroppe: Physik. 7. Aufl. Carl Hanser. 1986

[Tynd] J. Tyndall (Übers. H. Helmholtz): Faraday und seine Entdeckungen. Vieweg 1870

[Zang] A. Zangwill: Modern Electrodynamics. Cambridge Univ. Press 2013