Prof. Dr. Erik Jacobson

FH-FFM, Fb MND

Formelsammlung Physik

Mathematische Grundlagen

Vektorrechnung

3-dimensional:
$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (x, y, z)$
Betrag (Länge): $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2-dimensional:
$\vec{r} = (x, y)$
$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (Pythagoras)
Komponenten:
$x = r \cdot cos\,\varphi$ und $y = r \cdot sin\,\varphi$

Addition: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$
Skalarprodukt (3-dim): $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z)$
Vektorprodukt (3-dim): $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y\,b_z - a_z\,b_y, a_z\,b_x - a_x\,b_z, a_x\,b_y - a_y\,b_x)$

Infinitesimalrechnung

Differentialrechnung

Ableitungen:
$\frac{d}{dx}x^n = \frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ (für $n \neq 0$)
$\frac{d}{dx}sin(x) = cos(x)$
$\frac{d}{dx}cos(x) = -sin(x)$
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}ln(x) = 1/x$

Kettenregel:
$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d\,g(f(x))}{dx} = \frac{d\,g(y)}{dy} \cdot \frac{d\,f(x)}{dx}$

Produktregel:
$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{df(x)}{dx}\cdot g(x) + f(x)\cdot \frac{dg(x)}{dx}$

Integralrechnung

Integrale (Stammfunktionen):
$\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ (für $n \neq -1$)
$\int sin(x)dx = -cos(x)$
$\int cos(x)dx = sin(x)$
$\int e^x dx = e^x$
$\int 1/x\ dx = ln(x)$

1 Mechanik eines Massenpunktes

Massenpunkt := Körper mit verschwindender Ausdehnung und endlicher Masse m

1.1 Kinematik der Translation

Beschreibung der Bewegung

1.1.1 Bewegungsgrößen

Ort = Ortsvektor	$\vec{r}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$
Beschleunigung	$\vec{a} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Bahn = Folge von Orten im Laufe der Zeit $\vec{r}(t)$
Bahnkurve = (parametrisierte) Funktion: y = f(x)
Bahntangente = Geschwindigkeitsrichtung
Verschiebung = Ortsänderung = $\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$
Weg s (skalar) $\neq$ Verschiebung $\boxed{s = \int |d\vec{s}| = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int |v(t)| dt}$

1.1.2 Bewegungsgleichungen

In der üblichen Näherung a = const

$$\boxed{\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2}} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \boxed{x = x_0 + v_x \cdot t + \frac{1}{2}a_x \cdot t^2} \\ \boxed{y = y_0 + v_y \cdot t + \frac{1}{2}a_y \cdot t^2} \\ \boxed{z = z_0 + v_z \cdot t + \frac{1}{2}a_z \cdot t^2} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \\ \vec{a}(t) = \text{const} \end{array}}$$

Anwendungen

- geradlinige gleichförmige Bewegung (v = v_0 = const, a = 0): $\ldots \vec{r} = x = s = x_0 + v_0 \cdot t$

- geradlinige gleichmäßig beschleunigte Bewegung (a_0 = const):
  . $\ldots \vec{r} = x = s = x_0 + v_0 \cdot t + a_0 \cdot t^2$
  z.B. freier Fall: $a_0 = -g$ $\ldots \vec{r} = y$
- (schiefer) Wurf (Bahnkurve = Wurfparabel): mit $a_x = 0, a_y = -g$ $\ldots \vec{r} = (x, y)$
- allgemeine Bewegung $\vec{a} = \vec{a}(t)$ $\ldots \vec{r} = \sum \vec{c}_n \cdot t^n$

1.1.3 Relativbewegungen

a) Klassische Inertialsysteme (Systeme ohne Beschleunigungen):
eine gleichförmige Bewegung $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t$ in einem gleichförmig (mit $\vec{v}_0 \neq 0$) bewegten Bezugssystem erscheint einem Beobachter in einem anderen (ruhenden) Bezugssystem wieder als gleichförmige Bewegung $\vec{r}\,'(t) = \vec{r}_0\,' + \vec{v}_0\,' \cdot t$, die sich durch eine Translations-Transformation (nach Galilei) berechnen läßt:

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{r}_0\,' + \vec{v}_0\,' \cdot t = \vec{r}_0 + \vec{v}\,t - \vec{v}_0 \cdot t$$
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0$$

b) Spezielle Relativitätstheorie: (Einstein)
alle Geschwindigkeiten $v < c_0$ (Lichtgeschwindigkeit $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s)
Translations-Transformation (nach Lorentz) mit Zeit-Transformation ($t \to t'$):

$$\vec{r}\,'(t') = (\vec{r}(t) - \vec{v}_0 \cdot t)/\gamma \qquad t' = (t - \tfrac{\vec{v}_0 \cdot \vec{r}}{c_0^2})/\gamma \qquad \gamma = \sqrt{1 - \tfrac{v_0^2}{c_0^2}}$$
$$\vec{v}\,' = (\vec{v} - \vec{v}_0)/(1 + \tfrac{\vec{v} \cdot \vec{v}_0}{c_0^2})$$

c) relativistische Effekte (Folgen, wenn v_0 oder v gegen c geht):
- Zeitdilatation: $\Delta t = \Delta t'/\gamma$ und ! $\Delta t' = \Delta t/\gamma$
- Längenkontraktion: $\Delta l = \Delta l' \cdot \gamma$ und ! $\Delta l' = \Delta l \cdot \gamma$ (falls $\vec{\Delta l} \parallel \vec{v}_0$)
- Massenzunahme: $m = m'/\gamma$
- (kinetische) Gesamtenergie: $E = m\,c^2$

1.2 Kinematik der Rotation

Kreisbewegung (um den Ursprung)
Kreisbahn: $x^2 + y^2 = r^2$
Ort = Ortsvektor: $\vec{r}(t) = (x, y)$ Radius $r = |r| = const$
Koordinaten: x = r cos(φ), y = r sin(φ)
Winkel: $\varphi = s/r$ $[\ \varphi\ ] = 1$ m/m $= 1$ rad $= \frac{360^0}{2\pi} \approx 57,3^0$
Weg: $s = r \cdot \varphi$ (skalar !)

1.2.1 Bewegungsgrößen

Winkel	: $\varphi = s/r = \varphi(t)$
Winkelgeschwindigkeit:	$\omega = \dot{\varphi}$
Winkelbeschleunigung :	$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$

1.2.2 Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega} \cdot t + \tfrac{1}{2}\vec{\alpha} \cdot t^2\\ &\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha} \cdot t\\ &\vec{\alpha}(t) = \text{const}\end{aligned}}$$

Axiale Vektoren $\boxed{\vec{\varphi} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{\alpha}}$ auf der Drehachse

1.2.3 Winkelgeschwindigkeit

$\boxed{\omega = \frac{d\phi}{dt} = \dot{\varphi}}$ Dreibein: $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$

Spezialfall: gleichförmige Drehbewegung $\omega = \text{const}$
Umlaufszeit: $T = 2\pi/\omega = \text{const}$
(Umlaufs)frequenz: $f = 1/T = \omega/2\pi = \text{const}$
Drehzahl: n = f (Maßeinheit 1/min)
Kreisfrequenz: $\omega = 2\,\pi\,f$
(Bahn)geschwindigkeit: $|v| = \omega\,r = \text{const}$

1.2.4 Radialbeschleunigung

$\vec{r}(t) \neq \text{const} \rightarrow$ Zentripetal-, Radialbeschleunigung $\boxed{\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{r}}$

1.2.5 Winkelbeschleunigung

$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}}$

$|\omega| = \omega_0 + \alpha\,t \neq \text{const} \rightarrow$ Bahnbeschleunigung $\boxed{\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}}$
Radialbeschleunigung $a_r = \omega^2\,r = (\omega_0 + \alpha\,t)^2\,r = a(t)$

1.2.6 Translation und Rotation

Rotation	Translation	Beziehung
Winkel φ	Weg s	s $= \varphi \cdot r$
Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$	Geschwindigkeit v $= \dot{s}$	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Winkelbeschleunigung $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	Beschleunigung a $= \dot{v}$	$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$
		$\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$

1.2.7 Gesamtbeschleunigung

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$

1.2.8 Überlagerung von Translation und Rotation

Translation einer Achse ($\vec{r}_A$) und einer Rotation um diese Achse ($\vec{r}_R$)
Superposition: $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}_R$

Krumme Bahnen: Bahnstücke ds aus Kreisbögen mit variablen Radien R

$$\frac{1}{R} = \sqrt{(\frac{d^2x}{ds^2})^2 + (\frac{d^2y}{ds^2})^2 + (\frac{d^2z}{ds^2})^2}$$

1.3 Dynamik

Dynamik eines Massenpunktes

1.3.1 Erstes Newton'sches Axiom (Trägheitsprinzip)

Beharrungsvermögen: "Jeder Körper ist träge" $\boxed{\vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{F} = 0}$

1.3.2 Zweites Newton'sches Axiom (Aktionsprinzip)

$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$ $\boxed{[F] = 1N = 1\frac{kg\,m}{s^2}}$

1.3.3 Drittes Newton'sches Axiom (Reaktionsprinzip)

$\boxed{\vec{F} = -\vec{F}\,'}$ oder $\boxed{\sum \vec{F} = 0}$

1.3.4 Träge Masse und Schwere Masse

Träge Masse: $\vec{F_t} = m \cdot \vec{a}$ (nur bei Beschleunigung)
Schwere Masse: $\vec{F_g} = m \cdot \vec{g}$ (erzeugt durch Erdanziehung bzw. Gravitation)

1.3.5 Kräfte als Vektoren

$\sum \vec{F_i} = \vec{F}$ (Vektoraddition)

1.3.6 Arten von Kräften

a) Schwerkraft (Massenanziehung der Erde): $\boxed{\vec{G} = \vec{F_g} = m\,\vec{g}}$
Auf der Schiefen Ebene: Hangabtriebskraft F_H und Auflagekraft F_N (Normalkraft)
b) Muskelkraft nicht berechenbar
c) Federkraft (Hooke'sches Gesetz) $\boxed{\vec{F_F} = -D\vec{y}}$
d) Verformungskraft schwer berechenbar (s. Elastomechanik)
e) Elektromagnetische Kräfte (s. Elektrodynamik)
f) Reibungskräfte

1.3.7 Reibung

Trockene Reibung fester Körper $\boxed{F_R = \mu\,F_N}$ (μ ist materialabhngig, meist < 1)

a) Gleitreibung $\boxed{\vec{F_R} = -\mu\,|F_N|\frac{\vec{v}}{v}}$

b) Haftreibung $\boxed{\vec{F_R} = -\mu_H\,|F_N|\frac{\vec{v}}{v}e^{(\frac{v}{v_0})^2}}$

c) Rollreibung $\boxed{\vec{F_R} = -\mu_R\,|F_N|\frac{\vec{v}}{v}}$ $\mu_R = f_r/r$ (r = Rollradius)

1.3.8 Trägheit

Trägheitskraft $\boxed{\vec{F}_t = -m\,\vec{a}}$
Dynamisches Gleichgewicht: $\boxed{\sum_j \vec{F}_j = \sum_i \vec{F}_i - m\,\vec{a} = 0}$ $\boxed{\boxed{\sum_j \vec{F}_j = 0}}$

1.3.9 Zwangs- und Führungskräfte

Auflagekraft: $\vec{F}_Z = -\vec{F}_g$
Normalkraft: $\vec{F}_Z = -\vec{F}_N$
Seilkraft (bei Rotation): $\vec{F}_Z = \vec{F}_s = -m\,\vec{a}_R$

1.4 Arbeit und Energie

1.4.1 Arbeit

$\boxed{\boxed{W := \int \vec{F} d\vec{s}}}$ Maßeinheit $\boxed{[W] = [F][s] = 1N\,m = 1J = 1Joule}$

$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot cos\alpha}$ falls $\vec{F} = const$

1.4.2 Arbeitsformen

a) Hubarbeit $\boxed{W_H = m\,g\,\Delta h}$ (wegunabhängig)

b) Beschleunigungsarbeit $\boxed{W_B = m\,\vec{a}\,\vec{s} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)}$ (zeitunabhängig)

c) Reibungsarbeit $\boxed{W_R = \mu\,|F_N|\,s}$

d) Spannarbeit $\boxed{W_S = \frac{1}{2}D\,(s_2^2 - s_1^2)}$

e) Zwangsarbeit $\boxed{W_Z = \vec{F}_Z\,\vec{s} = 0}$ da $\vec{F}_Z \perp \vec{s}$

1.4.3 Energie

Energie = gespeicherte Arbeit
Energie = $\sum$ Arbeit
Arbeit = Δ Energie
Arbeit = Energieänderung

1.4.4 Energieformen

a) Potentielle Energie (Lageenergie) $\boxed{W_{pot} = m\,g\,h}$
(Bezugspunkt $h = 0$ ist (noch) undefiniert)

b) Kinetische Energie (Bewegungseneregie) $\boxed{W_{kin} = \frac{1}{2}m\,v^2}$ (immer positiv)

c) Federenergie (elastische Energie) $\boxed{W_F = \frac{1}{2}D\,s^2}$ (immer positiv)

c) Reibungsenergie = Wärme (s. Thermodynamik) $\boxed{W_R = \Delta Q}$

1.4.5 Energieerhaltungssatz

$\boxed{\boxed{\sum_j W_i = const}}$ (im abgeschlossenen System)

praktisch: $W_a + W_A = W_e + \Delta Q$
(Anfangsenergie + Arbeit = Endenergie + Wärme)

Wirkunggrad $= \frac{\text{nutzbare Energie}}{\text{aufgewandte Arbeit}}$ $\boxed{\eta = \frac{W_{end}}{W_{end}+\Delta Q} = 1 - \frac{\Delta Q}{W_{ges}} < 1}$

1.4.6 Leistung

$\boxed{\boxed{P := \frac{dW}{dt}}}$ Maßeinheit $\boxed{[P] = [W]/[t] = 1J/s = 1W}$

$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$

1.4.7 Energieumwandlung

$\boxed{E = m\,c^2}$ (Einstein 1909)

1.5 Der Impuls

1.5.1 Kraftstoß

$\boxed{\vec{K} := \int \vec{F} dt = m\,\Delta\vec{v}}$ Maßeinheit $\boxed{[W] = [F][s] = 1N\,m = 1J = 1Joule}$

1.5.2 Impuls und Kraft

a) Definition des Impulses

$\boxed{\boxed{\vec{p} := m\,\vec{v}}}$ Maßeinheit $\boxed{[p] = [F][t] = [m][v] = 1N\,s = 1kg\,m/s}$

b) verallgemeinerte Definition der Kraft

$\boxed{\boxed{\vec{F} := \frac{\vec{p}}{dt}}}$ $\vec{F} = \frac{\vec{p}}{dt} = \frac{m\,\vec{v}}{dt} = m\,\vec{a} + \vec{v}_m\,\dot{m}$

c) Schubkraft = Rückstoß (propellere)

$\boxed{\vec{F}_p = -\vec{v}_m\,\dot{m}}$

1.5.3 Impulserhaltung

$\boxed{\boxed{\sum_i \vec{p}_i = const}}$ (im abgeschlossenen System)

1.5.4 Stoßgesetze

Anwendung von:
I: Impulserhaltungssatz: $\sum_i \vec{p_i} = const$
E: Energieerhaltungssatz: $\sum_i W_i = const$

a) Zentraler elastischer Stoß

$(\Delta Q = min = 0)$

$\boxed{\vec{u}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2}$

$\boxed{\vec{u}_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\vec{v}_2 + \frac{2m_1}{m_2 + m_1}\vec{v}_1}$

. .Spezialfälle:

$m_1 = m_2 = m$: $\boxed{\vec{u}_1 = \vec{v}_2 \qquad \vec{u}_2 = \vec{v}_1}$

$m_1 \gg m_2 = m$ und $\vec{v}_2 = 0$: $\boxed{\vec{u}_1 = -\vec{v}_1}$

b) Zentraler inelastischer Stoß

$(\Delta Q = max = \Delta Q_m)$

$\boxed{u_1 = u_2 = u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$

$\boxed{\Delta Q_m = \frac{1}{2}\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2}$

c) Zentraler teilelastischer Stoß

$(\Delta Q < \Delta Q_m)$

Elastizitätsparameter k (0 für inelastischen, 1 für vollelastischen Stoß)

$\bar{u}_1 = k \cdot u_1 + (1-k) \cdot u = u_1 + (1-q)\frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} \qquad q = (1-k)$

$\bar{u}_2 = k \cdot u_2 + (1-k) \cdot u = u_2 + (1-q)\frac{m_1(v_2 - v_1)}{m_2 + m_1} \qquad k = (1-q)$

$\overline{\Delta Q} = (1-k^2) \cdot \Delta Q_m = q(2-q) \cdot \Delta Q_m$

d) Dezentrale Stöße:

2-dimensional in der Ebene von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$

1. Methode: Zerlegung durch Projektion auf:
– Stoßtangente $\vec{t}$ ohne Kraftwirkung,
d.h. mit Erhaltung der Geschwindigkeitskomponenten v_{1t} und v_{2t}
– Stoßgerade $\vec{s}$ mit Anwendung der Stoßgesetze auf v_{1s} und v_{2s}

2. Methode: Translationstransformation auf $\vec{v}_2 = 0$ und Betrachtung der möglichen Impulsvektoren auf Ortskreisen:

$$Y^2 + (X - \frac{m_2}{m_1 + m_2}p_1)^2 = R^2 = (\frac{m_2}{m_1 + m_2}p_1)^2(1 - (1 - k^2))$$

1.5.5 Anwendungen

- Ballistisches Pendel
- Hammer
- Reflexion als elastischer Wandstoß $(m_2 \to \infty)$

2 Mechanik starrer Körper

2.1 Statik starrer Körper

2.1.1 Starre Körper

System aus Massenpunkten m_i mit festen Abständen $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j = const$

2.1.2 Masse und Volumen

Jeder Körper hat eine Masse m (skalar) Maßeinheit: 1kg
Jeder Körper besteht aus Teilchen (Atomen, Molekülen) $m = \sum^N m_i \quad (N \approx 10^{23})$
Volumen: Jeder Körper hat eine Ausdehnung (Volumen V) Maßeinheit: $[V] = m^3$
Dichte: Jeder Körper hat eine (Packungs)Dichte ρ Maßeinheit: $[\rho] = 1kg/m^3$

$\boxed{\rho := dm/dV}$ homogene Körper: $\boxed{\rho = m/V = const}$

$\boxed{m = \int_K \rho dV}$

2.1.3 Elastomechanik

Elastizitätskonstanten deformierbarer Körper

- E: Elastizitätsmodul $\boxed{\Delta l = -F_l \cdot l/A_0 \cdot E}$
- μ: Querkontraktionszahl $\boxed{\Delta z = -\mu \cdot \Delta l}$ $\mu < 1/2$
- K: Kompressionsmodul $\boxed{K = \frac{E}{3(1-2\mu)}}$
- G: Schubmodul $\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}$

2.1.4 Drehmoment und Hebelgesetze

Gleichgewicht am Hebel, wenn $\sum F_i \cdot r_i \cdot sin\,\alpha_i = 0$ Hebelgesetz: $\boxed{\sum \vec{M}_i = 0}$

Drehmoment: $\boxed{\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}}$ Betrag $\boxed{M = r \cdot F \cdot sin\,\alpha}$ Maßeinheit: $[M] = 1\,N\,m$
axsialer Vektor ! (an (Rotations)Achse gebunden)

2.1.5 Schwerpunkt, Massenmittelpunkt

$\boxed{\vec{s} = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{r}_i = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm}$ $\boxed{\sum m_i \vec{s}_i = 0}$ $\boxed{\vec{s} = \frac{1}{V} \int \vec{r} dV \text{ (falls } \rho = \text{const)}}$

2.2 Kräfte am starren Körper

2.2.1 Kräfte und Drehmomente

Mehrere Kräfte $\vec{F_i}$, die an verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen, ergeben

$\boxed{\vec{F} = \sum \vec{F_i}}$. eine Gesamtkraft (durch Verschieben der polaren Vektoren) an einen beliebigen Punkt)

$\boxed{\vec{M} = \sum \vec{M_i} = \sum \vec{r_i} \times \vec{F_i}}$. ein Drehmoment in Bezug auf eine vorgegebene Achse (axiale Vektoren)

2.2.2 Gleichgewichte und Standfestigkeit

stabil:	$W_{pot} = min$
labil:	$W_{pot} = max$
indifferent:	$W_{pot} = const$
instabil:	$a \neq 0$

2.2.3 Trägheit bei der Drehbewegung

Massenträgheitsmoment und Rotationsenergie

$\boxed{J := \sum m_i r_i^2 = \int_K r^2 dm}$ $\boxed{W_{rot} := \frac{1}{2} J\, \omega^2}$

2.2.4 Massenträgheitsmomente

Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt

Quader	$J_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Kugel	$J_K = \frac{2m}{5} R^2$
Hohlzylinder	$J_z = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2)$
Vollzylinder (quer)	$J_q = \frac{m}{12}(L^2 + 3R^2)$

2.2.5 Satz von Steiner

$\boxed{J := ms^2 + J_s}$ Verschiebung der Achse aus dem Schwerpunkt um s

2.2.6 Trägheitstensor

Hauptträgheitsmomente $J_{zz} = max$ und $J_{yy} = med$ und $J_{xx} = min$
bezüglich der körperfesten **Hauptträgheitsachsen** (x, y, z) (Diagonalelemente)
Deviationsmomente $J_{xy} = \sum m_i x_i y_i = \int xy\, dm$

Bei Verdrehung der Achse um α, β, γ wird $\boxed{J := J_{xx} cos^2\alpha + J_{yy} cos^2\beta + J_{zz} cos^2\gamma}$

2.2.7 Trägheitsradius und Trägheitsmasse

Trägheitsradius: $R_t = \sqrt{J/m}$
effektive Trägheitsmasse: $m_e = J/R^2$

2.3 Dynamik starrer Körper

2.3.1 Antrieb

$\boxed{\vec{M} := J\,\vec{\alpha}}$

2.3.2 Arbeit

$\boxed{W_D = \int M\,d\varphi}$

2.3.3 Drehimpuls

$\boxed{\vec{L} := m\vec{r} \times \vec{v}}$ $\boxed{\vec{L} := J\vec{\omega}}$

2.3.4 Leistung

$\boxed{P = M\omega}$

2.3.5 Drehimpulserhaltung

$\boxed{\vec{L} = \text{const}}$ und $\boxed{\vec{M} = 0}$ im abgeschlossenen System

2.3.6 Drehimpulserzeugung

$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dJ}{dt}\vec{\omega} + J\frac{d\vec{\omega}}{dt}}$

2.3.7 Anwendungen

Drallsatz: $\boxed{\vec{L} = \vec{M}t}$

2.3.8 Der Kreisel

Symmetrischer freier Kreisel mit (konstanter) Winkelgeschwindigkeit ω

a) $\vec{M} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}$ momentenfreier Kreisel

b) $\vec{M} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}}$ **Präzession** mit Präzessionsfrequenz ω_p

c) Ausweichmoment

Bei erzwungener Drehung der Achse eines Kreisels $\boxed{\vec{M}_A = \vec{L} \times \vec{\omega}_A}$

d) Nutation Nach Stoß auf die Achse eines Kreisels $K_M = \int M_x dt = L_x$

$\boxed{\omega_n = \frac{J_{zz}}{\sqrt{J_{xx}J_{yy}}}\,\omega}$

2.4 Scheinkräfte in rotierenden Systemen

2.4.1 Zentrifugalkraft

$\boxed{\vec{F}_{ZF} = -\vec{F}_Z = m\vec{\alpha}_R = m\omega^2\vec{r}}$

2.4.2 Coriolis-Kraft

$\boxed{\vec{F}_C = m\vec{a}_C = 2m\vec{u} \times \vec{\omega}}$

2.5 Gravitation

2.5.1 Gravitationsgesetz

$\boxed{\vec{F}_G = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|r|}}$ Massenanziehung (Newton 1687) $\boxed{\gamma = 6.67\,10^{-11} \frac{m^3}{kg\,s^2}}$ (Cavendish)

$\boxed{\vec{F}_g = mg = m\gamma \frac{m_E}{r_E^2}}$ auf der Erdoberfläche (mit $m_E = 5.9\,10^{24} kg$ und $r_E = 6366 km$)

Satellitenbahnen (um die Erde) $v^2 r = \omega^2 \cdot r^3 = \gamma m_E$ (weil $F_G = F_{ZF}$)

$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_E}}}$ Umlaufszeit

Fluchtgeschwindigkeiten
(Abheben von der Erde ohne Erdrotation) $v_0 = \sqrt{\gamma m_E / r_E} = \sqrt{g r_E} = 7.9\,10^3 \frac{m}{s}$
1. kosmische Geschwindigkeit:
(Verlassen des Anziehungsbereichs der Erde) $v_1 = \sqrt{2\gamma m_E / r_E} = \sqrt{2 g r_E} = 11.17\,10^3 \frac{m}{s}$
2. kosmische Geschwindigkeit:
(Verlassen des Anziehungsbereichs der Sonne aus der Erdbahn)

2.5.2 Kepler-Gesetze

Kepler (1609)

1. Die Planeten bewegen sich auf Kreisen (genauer: Ellipsen), in deren Mittelpunkt (genauer: in einem Brennpunkt) die Sonne steht.

2. Der von der Sonne zu einem Planten gedachte Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen ($\Delta A = \Delta t$).

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Abstände (große Halbachsen) zur Sonne. $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$

2.5.3 Gravitationsfeld und -potential

Gravitationsfeldstärke $\boxed{g := F_G/m = \vec{g}(\vec{r})}$

Gravitationsfeld der Erde: . $.g(r) = \gamma \frac{m_E}{r^2} = g_0 (\frac{r_E}{r})^2$ für $r > r_E$
$g(r) = \gamma \frac{m_E}{r_E^3} r = g_0 (\frac{r}{r_E})$ für $r < r_E$

Gravitationspotential $\boxed{\varphi_g := W_{pot}/m}$

absolute potentielle Energie:
$W_{pot} = m\varphi_g(r) = \int mg(r)\, dr = -\gamma m m_E / r = -m g_0 r_E^2 / r$ (immer negativ !!)
Gravitationsnullpunkt: $\varphi_g := 0$ bei $r \to \infty$
Gravitationspotential der Erde: . $.\varphi_g := -\gamma m_E \frac{1}{r}$ Hyperbel für $r > r_E$
$\varphi_g := \frac{1}{2} \gamma \frac{m_E}{r_E} ((\frac{r}{r_E})^2 - 3)$ Parabel für $r < r_E$

$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) := grad(\varphi_g) = (\frac{d\varphi_g}{dx}, \frac{d\varphi_g}{dy}, \frac{d\varphi_g}{dz}) = \vec{g}(r)}$ (Zentralfeld)

Inhaltsverzeichnis